

Momento angular

$$\underset{\text{clásico}}{L = \vec{r} \times \vec{p}} \rightarrow \underset{\substack{\text{operador} \\ \text{cuántico}}}{\hat{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \rightarrow [L_i, L_j] = \sum_k \overset{i,j,k \in \{x,y,z\}}{i\hbar \epsilon_{ijk}} L_k$$

↓ generalizando

$$[J_i, J_j] = \sum_k i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

$$\hat{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \rightarrow [J^2, J_i] = 0$$

Podemos medir J^2 y UNA componente de $\vec{J}$ simultáneamente.

→ Los e-valores de J^2 son positivos $\hbar^2 j(j+1)$ ($j > 0$)

$$\begin{aligned} J^2 |\chi, j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |\chi, j, m\rangle \\ J_z |\chi, j, m\rangle &= \hbar m |\chi, j, m\rangle \end{aligned}$$

Operadores escalera

$$J_+ = J_x + iJ_y, \quad J_- = J_x - iJ_y$$

Identidades entre operadores

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

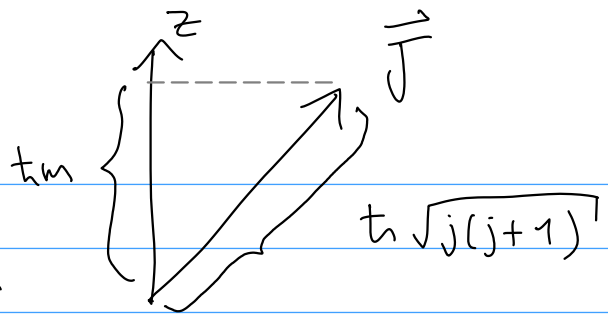
Si $\hbar m$ y $\hbar^2 j(j+1)$ son los e-valores de un e-vector $|\chi, j, m\rangle$

Lema I: $-j \leq m \leq j$

$$\text{Usamos } 0 \leq \|J_+ |\chi, j, m\rangle\|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m+1)$$

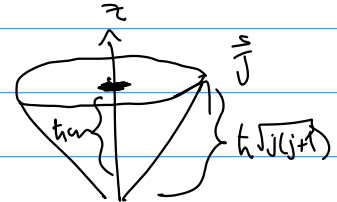
$$0 \leq \|J_- |\chi, j, m\rangle\|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m-1)$$

Como $\sqrt{j(j+1)} > j$



Como la componente z del vector es menor que la magnitud del vector entonces $\vec{J}$ nunca se puede alinear con el eje z .

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$



$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$|\chi, j, m\rangle$$

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \left| \frac{1}{2} \hbar \langle L_z \rangle \right|$$

$\therefore \vec{J}$ no puede estar perfectamente alineado con el eje z .

Si $\hbar m$ y $\hbar^2 j(j+1)$ son los e-valores de un e-vector $|\chi, j, m\rangle$

Lema II: i) $m = -j \Leftrightarrow J_- |\chi, j, m\rangle = 0$ ✓
 ii) Si $m > -j$ entonces $J_- |\chi, j, m\rangle \neq 0$
 y es e-vector de J^2 y J_z con e-valores $\hbar^2 j(j+1)$ y $\hbar(m-1)$.

Para el oscilador armónico

$$a|\phi_0\rangle = 0 \quad a|\phi_n\rangle = \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle$$

Dem: i) $\Rightarrow$ Usando

$$0 \leq \|J_- |\chi, j, m\rangle\|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m-1)$$

para $m = -j$
 $\Rightarrow \|J_- |\chi, j, m\rangle\|^2 = 0 \Rightarrow J_- |\chi, j, m\rangle = 0$

i) $\Leftarrow$] Suponemos $J_- |\chi, j, m\rangle = 0$ y queremos ver que $m = -j$.

Usando $J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$

sup
↓

$$0 = J_+ J_- |\chi, j, m\rangle = (J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) |\chi, j, m\rangle \\ = (\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m) \underbrace{|\chi, j, m\rangle}_{\text{como } \neq 0}$$

$$\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m = 0$$

$$\Rightarrow (j+m)(j-m+1) = 0$$

$$\Rightarrow j+m=0 \quad \text{ó} \quad j-m+1=0$$

$$\underline{m = -j}$$

ó

$$\cancel{m = j+1}$$

pues $-j \leq m \leq j$

ii) Supongamos $m > -j$

$$\|J_- |\chi, j, m\rangle\|^2 \neq 0 \quad (\text{por inciso anterior})$$

$$\Rightarrow J_- |\chi, j, m\rangle \neq 0$$

Veamos que $J_- |\chi, j, m\rangle$ es e-vector de J^2 y J_z .

$$J^2: \text{Recordemos que } [J^2, J_-] = [J^2, J_x - iJ_y] = 0$$

$$[J^2, J_-] |\chi, j, m\rangle = 0$$

$$J^2 J_- |\chi, j, m\rangle - J_- J^2 |\chi, j, m\rangle = 0$$

$$J^2 \underline{J_- |\chi, j, m\rangle} = \hbar^2 j(j+1) \underline{J_- |\chi, j, m\rangle} \quad \text{⊙}$$

J_z : Recordemos $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$

$$J_z J_- |\chi, j, m\rangle \stackrel{?}{=} J_- J_z |\chi, j, m\rangle - \hbar J_- |\chi, j, m\rangle$$

$$= \hbar m J_- |\chi, j, m\rangle - \hbar J_- |\chi, j, m\rangle$$

$$= \hbar(m-1) J_- |\chi, j, m\rangle$$

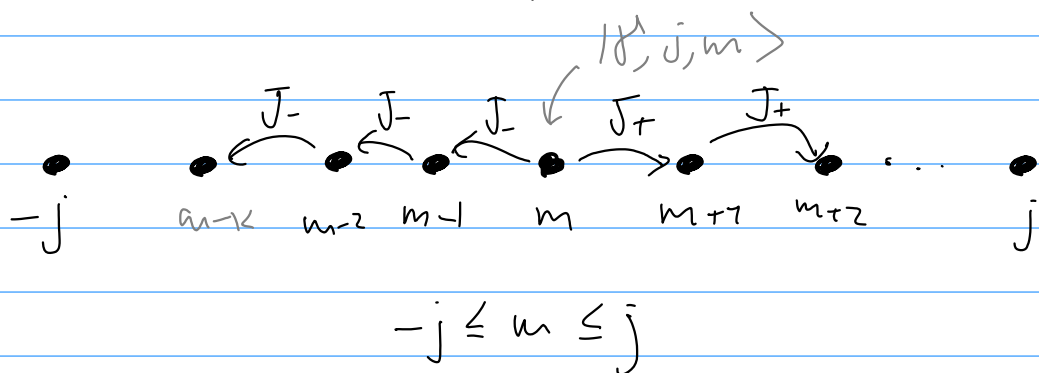


Lema III: i) $m=j \Leftrightarrow J_+ |\chi, j, m\rangle = 0$

ii) Si $m < j$, $J_+ |\chi, j, m\rangle \neq 0$ y es e-vector de J^2 y J_z con e-valores $\hbar^2 j(j+1)$ y $(m+1)\hbar$

análogo al lema II.

Espectro de J^2 y J_z .



Para que los lemas anteriores sean consistentes, los valores posibles de m son $-j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$. Es decir

$$\exists \text{ un } p \geq 0 \text{ entero} \quad m-p = -j$$

$$\exists \text{ un } q \geq 0 \text{ entero} \quad m+q = j$$

$\Rightarrow$ Restando estas ecuaciones
 $p+q=2j$

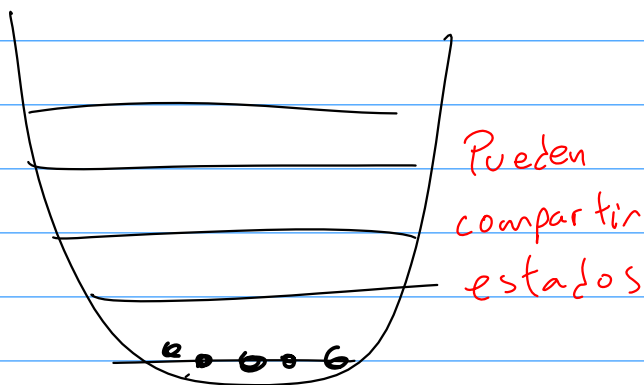
$\therefore 2j$ es entero positivo

$\therefore j$ puede valer $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

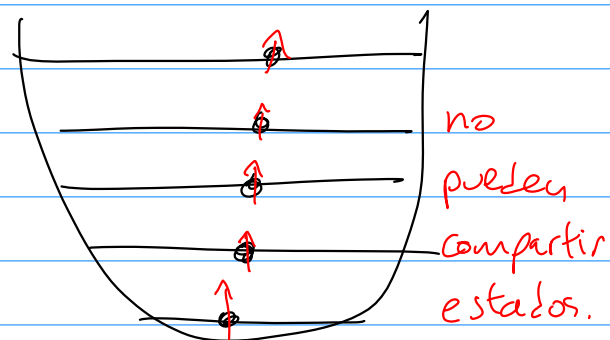
Las partículas se clasifican en dos categorías

Bosones j entero ($j=0, 1, 2, 3, \dots$)

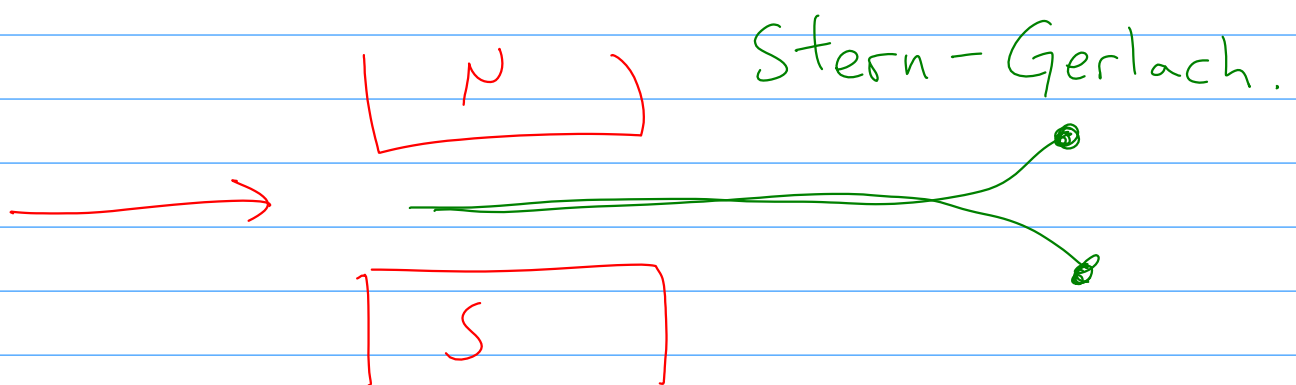
Fermiones j semi-entero ($j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$)



Bosones



Fermiones



$$j = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$-j \leq m \leq j$$